EXERCICE N°3 — 7 points — 40'

Soit la fonction f définie sur $[0;1[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1. a) Vérifier que $f'(x)=\dfrac{2x-x^3}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Calculer $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$

2. a) Justifier que f réalise une bijection de $[0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1}

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que: $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

4. Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ avec $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer $F'(x)$

b) En déduire que pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin(2x)$

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

d) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx=\frac{\pi-2}{8}$

5. Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn

Tous droits réservés © TakiAcademy.com